Metody Numeryczne – Zad 2

Tymon Bielski, Informatyka 3 semestr, Grupa 3, 193729

# Wprowadzenie

Celem tego sprawozdania jest analiza czasu potrzebnego do obliczenia układu równań w postaci macierzowej przez 3 algorytmy do tego przeznaczone: Jacobiego i Gaussa–Seidla oraz faktoryzacji LU, oraz normy residuum z wyniku uzyskanego przez te rozwiązania.

Układ równań liniowych, na podstawie którego będzie przeprowadzona dzisiejsza analiza przyjmuje postać:

Gdzie A jest macierzą systemową, b wektorem pobudzenia, a x wektorem rozwiązań.

# Zadanie A – tworzenie równania

Ze względu na mój numer indeksu, dla pierwszych zadań macierz A będzie macierzą kwadratową o rozmiarze 929 × 929, przyjmującą następującą postać:

Wektor b jest wektorem kolumnowym o wysokości 929 wypełnionym przez wartości określone równaniem:

Gdzie n jest kolejnymi elementami wektora; wektor zatem przyjmuje postać:

Natomiast wektor x jest, na początku działania algorytmów, wypełniony zerami i również jest wektorem kolumnowym o wysokości 929:

# Zadanie B – wyznaczanie rozwiązania przy użyciu metod Jacobiego i Gaussa–Seidla

Algorytmy Jacobiego i Gaussa–Seidla, jako algorytmy iteracyjne, będą wykonywały określoną liczbę iteracji, lub zatrzymają się przedwcześnie, gdy norma residuum osiągnie określoną wartość. W przypadku tego zadania zadawalająca wartość normy residuum pozwalająca na przedwczesne wyjście z pętli wynosi 10-9.

Poniższy wykres prezentuje zmianę normy residuum w zależności on numeru iteracji, dla obu algorytmów:

Jak widać na wykresie, norma residuum, dla wyniku równania obliczone przez te algorytmy, spada szybciej dla metody Gaussa-Seidla, niż w przypadku metody Jacobiego. W rezultacie Metoda Gaussa-Seidla musiała wykonać mniej iteracji, aby osiągnąć zadowalający nas stan normy residuum, bo zaledwie 11, w porównaniu do metody Jacobiego, która wymagała od nas wykonania 15 iteracji. Dokładniejsze rezultaty zaprezentowano w tabelce poniżej:



Dodatkowo w wyniku różnicy ilości iteracji, zauważalna jest różnica w czasie działania algorytmów. Algorytm Jacobiego potrzebował 10 milisekund, podczas gdy algorytm Gaussa-Seidla potrzebował zaledwie 7.

# Zadanie C – rozbieganie elementów równania dla metod Jacobiego i Gaussa–Seidla

Metody Jacobiego i Gaussa–Seidla nie zawsze jednak się nadają do obliczania macierzowych równań liniowych. Przykładowo, jeżeli zmodyfikujemy postać macierzy A aby wyglądała następująco:

Żadna z metod nie osiągnie nigdy normy residuum mniejszej niż 10-9. Zamiast tego, ich residuum początkowo spadnie, a następnie zacznie rosnąć w nieskończoność, aż do momentu wykonania maksymalnych 250 iteracji. Efekt ten można zaobserwować na wykresie residuum od numery iteracji.

Dla Jacobiego:

Oraz dla Gaussa-Seidla:

Ciekawą obserwacją jest fakt, że residuum dla Gaussa-Seidla jednocześnie spada, oraz rośnie szybciej oraz, że obu algorytmom obliczenia zajęły tyle samo czasu – 160 ms.

# Zadanie D – Rozwiązanie równania z punktu C przy pomocy faktoryzacji LU

Przy zastosowaniu metody faktoryzacji LU, równanie zostało policzone z dużo lepszymi rezultatami, ale residuum wciąż nie wyniosło zera. Dla równania z podpunktu C tego sprawozdania norma residuum wyniosła 2.96E-13. Jest to niesamowicie mała liczba, jednak wciąż nie wynosi ona zera. Może wynikać to z 2 powodów. Powód 1. to fakt, że równanie może nie mieć dokładnego rozwiązania, natomiast powodem 2. jest błąd obliczeń na danych zmiennoprzecinkowych, które mają określoną precyzję i zwyczajnie nie są w stanie przedstawić perfekcyjnego wyniku. Dodatkową obserwacją jest prędkość faktoryzacji LU, algorytm ten zajął aż 112 milisekund; wprawdzie krócej niż pełne 250 iteracji obu algorytmów iteracyjnych, ale ponad 10-krotnie wolniej niż w podpunkcie B.

# Zadanie E – czas rozwiązania w zależności od rozmiaru macierzy i metody rozwiązywania

W tym podpunkcie analizie zostaną poddane wszystkie 3 metody rozwiązywanie równań, dla macierzy A opisanej w podpunkcie A, ale o zmiennym rozmiarze, począwszy od 500 × 500 i na 5000 × 5000 kończąc. Wszystkie metody, dla każdego rozmiaru macierzy, zawszę osiągnęły normę residuum mniejszą niż 10-9. Następująca tabela przedstawia czas wykorzystany przez wszystkie 3 metody:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Czas[ms] | | | |
| Rozmiar macierzy | Jacobi | Gauss-Seidel | LU |
| 500 | 3 | 2 | 19 |
| 1000 | 13 | 9 | 148 |
| 1500 | 44 | 27 | 905 |
| 2000 | 86 | 56 | 2794 |
| 2500 | 129 | 95 | 6043 |
| 3000 | 173 | 129 | 10994 |
| 3500 | 241 | 188 | 16832 |
| 4000 | 318 | 235 | 23094 |
| 4500 | 442 | 340 | 30193 |
| 5000 | 580 | 464 | 38047 |

Wyniki te można umieścić na wykresie w celu łatwiejszej wizualizacji:

Na wykresie tym, jednak ciężko jest dopatrzeć się wyników osiągniętych przez metody Jacobiego oraz Gaussa-Seidla, dlatego zostały one przedstawione w odizolowaniu na poniższym wykresie:

# Zadanie F – Wnioski i konkluzje

Każda z metod ma swoje silne i słabe strony. Korzystając z metod iteracyjnych, jesteśmy w stanie uzyskać wynik, dużo szybciej, kosztem precyzji, z kolei faktoryzacja LU, pozostawia nas z minimalnym błędem lub jego brakiem, zajmując czas większy o całe rzędy wielkości. Jeżeli chodzi o metody iteracyjne, metoda Gaussa-Seidla wydaje się być lepsza od metody Jacobiego – zajmuje mniej czasu, oraz szybciej spada i rośnie jej norma residuum, co pozwala na szybsze przechwycenie równania niemożliwego do rozwiązania przez te metody.

W praktyce zatem wielkie macierze próbowałbym liczyć przy pomocy metody Gaussa-Seidla, a w przypadku jej niepowodzenia, użyłbym faktoryzacji LU, aby uzyskać dobry wynik, nawet w przypadku, gdy szybsza metoda nie przyniesie sukcesu.